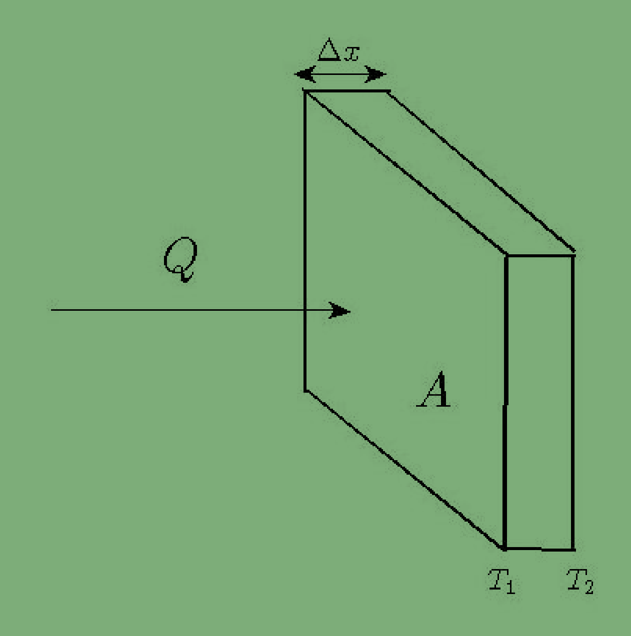
TRANSFERENCIA DE CALOR: CONDUCCIÓN

por

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-04

TRANSFERENCIA DE CALOR: CONDUCCIÓN

por

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-04

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Transferencia de calor: conducción.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 396.01 / 3-89-04
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-452-3
ISBN-13: 978-84-9728-454-7
Depósito Legal: M-9138-2013

Índice

Ecuación diferencial de conducción del calor 2

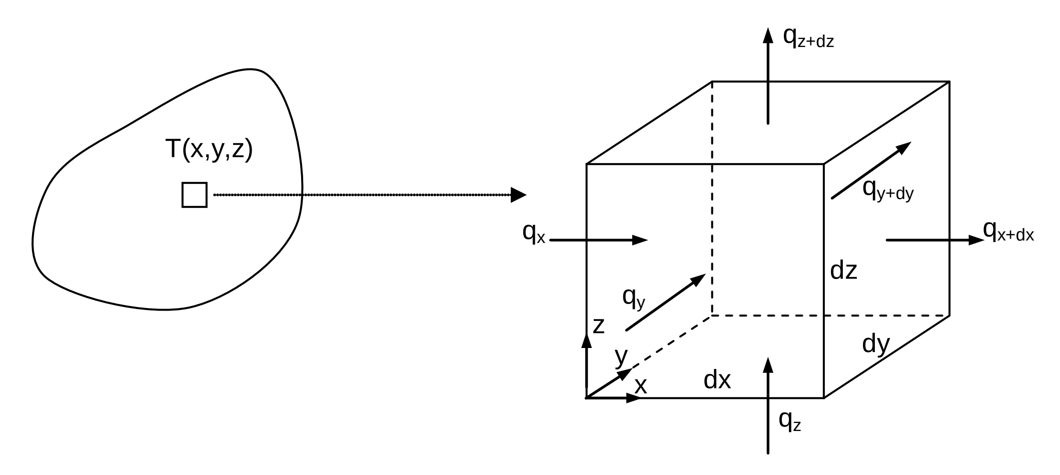
Conducción estacionaria unidimensional 9

Conducción estacionaria con generación interna de calor 21

Bibliografía 30

1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONDUCCIÓN DEL CALOR

Sea un paralelepípedo diferencial que forma parte de un medio en el que hay diferencia de temperatura de unos puntos a otros y en el que no hay cambio de fase ni movimientos macroscópicos entre sus partículas (advección). En estas condiciones la transferencia de calor, tanto en el interior del elemento como en sus límites, sólo puede tener lugar por conducción.



La ecuación de la conservación de la energía aplicada al paralelepípedo es:

$$q_{entra} + q_g = q_{sale} + \dot{U} \qquad \text{o bien} \qquad q_{entra} + q_g - q_{sale} = \dot{U}$$

siendo:

q_{entra} Potencia calorífica que entra en el elemento (sólo por conducción, según se ha justificado):

$$q_{entra}=q_x+q_y+q_z$$

q_g Potencia calorífica generada en el interior del elemento por unidad de volumen (reacción química, reacción nuclear, disipación eléctrica, ...).

$$q_g=q'''\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

donde q''' [W/m^3] es la denominada generación volumétrica.

q_{salida} Potencia calorífica que sale del elemento (sólo por conducción, según se ha justificado):

$$q_{salida}=q_{x+dx}+q_{y+dy}+q_{z+dz}$$

$\dot{U}$ Ritmo al que cambia la energía interna del elemento:

$$\dot{U} = dm\cdot c\cdot\frac{\partial T}{\partial t} = \rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot c\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

donde *dm* es la masa del elemento diferencial de densidad ρ y calor específico *c*.

Sustituyendo en la ecuación de conservación de la energía:

$$\left(q_x + q_y + q_x\right) + \left(q^{'''} dx\,dy\,dz\right) - \left(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}\right) = \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} dx\,dy\,dz$$

desarrollando en serie de Taylor y despreciando los términos de orden superior:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

la ecuación de la energía queda como:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q^{'''} dx\,dy\,dz = \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} dx\,dy\,dz$$

Dado que q_x, q_y y q_z se transmiten por conducción, en aplicación de la ley de Fourier:

$$q_x = -k_x\, A_x \frac{\partial T}{\partial x} = -k_x\, dy\,dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k_y\, A_y \frac{\partial T}{\partial y} = -k_y\, dx\,dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k_z\, A_z \frac{\partial T}{\partial z} = -k_z\, dx\,dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

de donde:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k_x\, dy\,dz \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz$$

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-k_y\, dx\,dz \frac{\partial T}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz$$

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z} dz = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-k_z\, dx\,dy \frac{\partial T}{\partial z}\right) dz = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

que sustituyendo de nuevo en la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz + q^{'''} dx\,dy\,dz = \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} dx\,dy\,dz$$

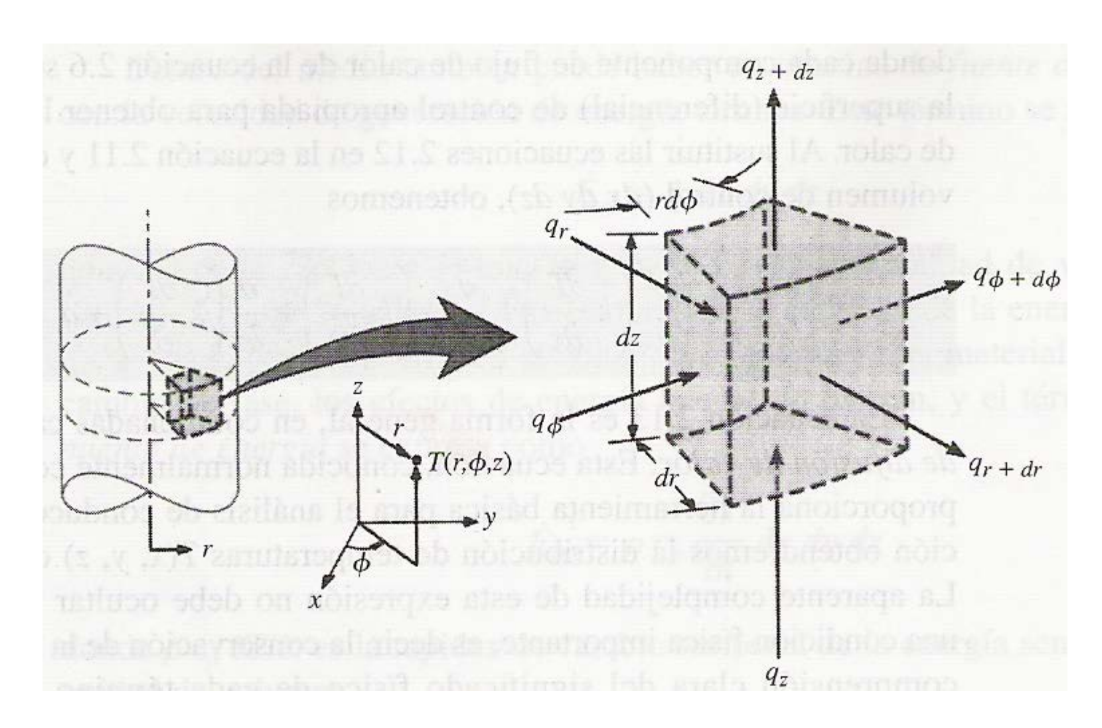
Dividiendo por el volumen dx·dy·dz del elemento:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q'''=\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.1)$$

que constituye la ecuación diferencial general de la conducción del calor (o ecuación de difusión del calor) en coordenadas cartesianas, donde el significado de cada uno de los términos es el siguiente:

$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k_\xi\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)=\frac{q_\xi - q_{\xi+d\xi}}{dx\,dy\,dz}$	Potencia calorífica neta por unidad de volumen hacia el interior del elemento en la dirección ξ (x, y ó z), [W/m^3].
q'''	Potencia calorífica generada internamente, [W/m^3].
$\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t}$	Potencia calorífica almacenada por unidad de volumen, [W/m^3].

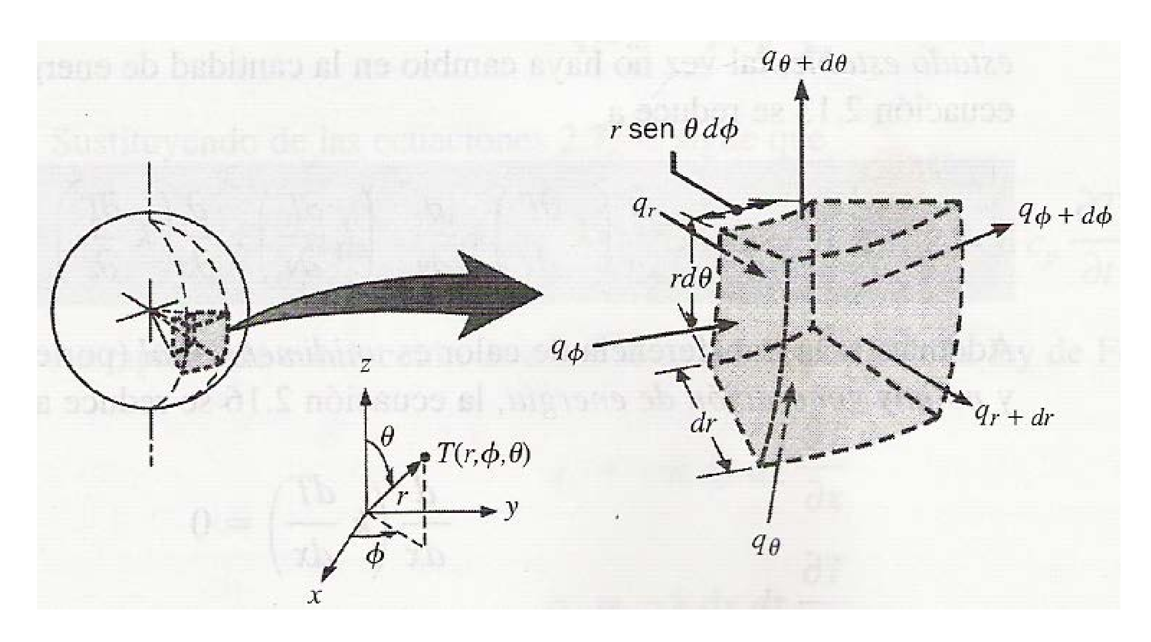
En coordenadas cilíndricas la ecuación de conducción es:



Volumen de control diferencial dr·r·dϕ·dz para el análisis de conducción en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r\, r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k_\phi\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q'''=\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2)$$

Y en coordenadas esféricas:



Volumen de control diferencial dr·r·sin θ·dϕ·dθ para el análisis de conducción en coordenadas esféricas (r, ϕ, θ).

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k_\phi \frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k_\theta \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+q^{'''}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

Empleando el operador ∇, para materiales homogéneos (k_x=k_y=k_z), la ecuación de conducción queda como:

$$\nabla\left(k\,\nabla T\right)+q^{'''}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

válida para cualquier sistemasde coordenadas elegido y donde:

Coordenadas cartesianas: $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

Coordenadas cilíndricas: $\nabla = i\frac{\partial}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + k\frac{\partial}{\partial z}$

Coordenadas esféricas: $\nabla = i\frac{\partial}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$

Algunos casos particulares interesantes de esta ecuación son:

- Material isótropo *(k_x=k_y=k_z=k)* y conductividad constante (supuesto que no cambia con la temperatura):

Coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

siendo $\alpha=\frac{k}{\rho c}$ [m^2/s] la difusividad térmica, otra propiedad de las sustancias.

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right]+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Empleando el operador ∇^2:

$$\nabla^2 T+\frac{q'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

mucho más sencilla, y válida para cualquier sistema de referencia, como era de esperar y donde:

C. cartesianas: $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

C. cilíndricas: $$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

C. esféricas: $$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]$$

- Si además de tratarse de un material isótropo con conductividad constante, el régimen es estacionario $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$:

$$\nabla^2 T+\frac{q'''}{k}=0$$

- Para material isótropo, conductividad constante o no constante (es indiferente), régimen estacionario, flujo unidireccional (por ejemplo, en la dirección x) y sin generación interna $\left(q'''=0\right)$, empleando coordenadas cartesianas:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad k\frac{dT}{dx}=cte$$

de donde: $q_x^{"}\left[\frac{W}{m^2}\right] = -k\frac{dT}{dx} = cte$ (flujo de calor constante)

$q_x\left[W\right] = q_x^{"}A = -kA\frac{dT}{dx} = cte$ (potencia calorífica total constante)

CONDICIONES DE CONTORNO Y CONDICIONES INICIALES

Ecuación de conducción es:

- De 1er orden en la variable temporal, exige una condición inicial:

$$t = 0 \qquad T(\vec{r},0) = T_0$$

- De 2º orden en las coordenadas espaciales, exige 2 condiciones de contorno en cada coordenada. Las condiciones de contorno habituales son:

1. Condición de Dirichlet o de primer tipo: temperatura superficial constante (la superficie está en contacto con una sustancia en cambio de fase: fusión/solidificación o condensación/ebullición o con un fluido con el que intercambia calor por convección con un coeficiente de convección h muy elevado).

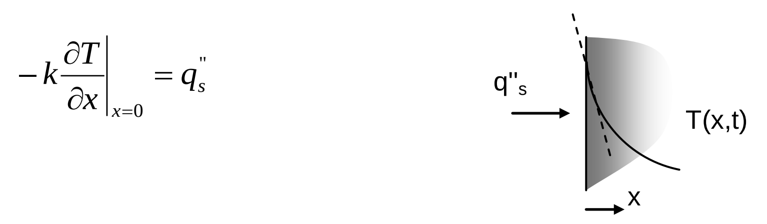
$T(0,t)=T_s$



2. Condición de Nuemann o de segundo tipo: flujo de calor constante.

   - Flujo de calor no nulo. Puede ser el caso de una superficie sobre la que incide una irradiación solar G_s [W/m^2]. $q_s^{"}$ correspondería con la fracción de energía radiante absorbida, esto es, $q_s^{"} = \alpha G_s$, siendo α la absortancia de la superficie.

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q_s^{"}$$



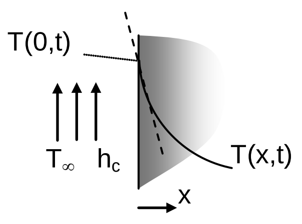
   - Superficie aislada térmicamente (adiabática):

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$



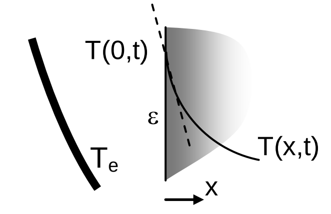
3. Convectiva o de tercer tipo:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h_c\left[T_\infty - T(0,t)\right]$$



4. Radiativa:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \varepsilon\,\sigma\left[T_e^4 - T^4(0,t)\right]$$



También pueden darse condiciones de contorno mixtas en las que tengan lugar de forma simultánea, por ejemplo, intercambio radiativo con otra superficie, convección e irradiación solar $\left(q_s''\right)$:

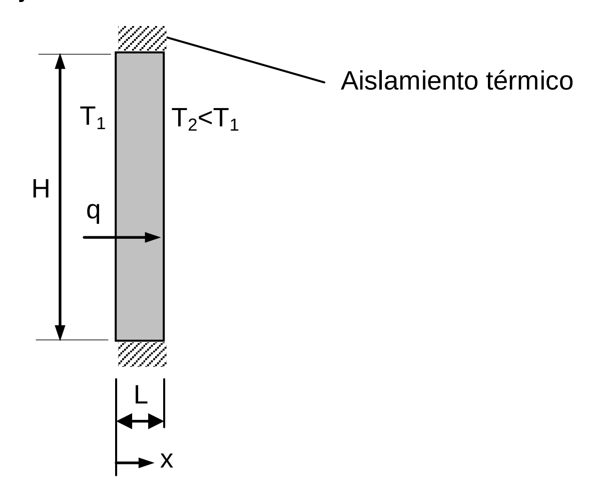
$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \varepsilon\,\sigma\left[T_e^4 - T^4(0,t)\right] + h_c\left[T_\infty - T(0,t)\right] + q_s''$$

Sólamente cuando las condiciones de contorno son lineales (condiciones de Dirichlet, Neumann o convectiva con h_c constante) pueden obtenerse soluciones analíticas a la ecuación de conducción. Esto no es posible con condiciones de contorno no lineales como es el caso de la condición radiativa o también de la condición convectiva con flujo laminar donde $h_c = h_0\left(T_\infty - T\right)^{1/4}$. En estos casos es necesario acudir a métodos numéricos de resolución de la ecuación diferencial.

2. CONDUCCIÓN ESTACIONARIA UNIDIMENSIONAL

En este apartado se estudiará la conducción estacionaria unidimensional, caracterizada porque las variables objeto de estudio no varían en el tiempo $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$, quedando definida la ley de temperatura en función de una única coordenada espacial. Tampoco se considerará, de momento, la generación interna (q'''=0). Los casos de estudio más significativos son los de paredes plana, cilíndrica y esférica. En todos ellos se supondrá materiales isótropos (la conductividad térmica no varía con la dirección considerada) y como aproximación que la conductividad del material es constante con la temperatura, lo cual es una buena aproximación a la realidad siempre que el rango de variación de temperatura dentro del material no sea muy amplio.

Pared plana simple: sea una pared plana de espesor L, altura H, profundidad b (perpendicularmente al plano del dibujo) y temperaturas superficiales T_1 y T_2. Para que la conducción a través de la pared sea estrictamente unidimensional (perpendicularmente a la misma) es preciso que todo el canto perimetral esté aislado térmicamente. Si no dispone de tal aislamiento sólo se podrá asegurar la conducción unidimensional en las zonas alejadas del borde.



Aplicando la ecuación diferencial de difusión del calor en cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q'''=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Que según lo establecido, se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0$$

y dado que sólo queda una variable independiente, la derivada parcial se puede expresar como total:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$$

Y dado que la conductividad se ha establecido como constante:

Integrando: $$\frac{dT}{dx}=C_1$$

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen de la aplicación de las condiciones de contorno:

$T(x=0)=T_1$ $\quad\quad$ $T(x=L)=T_2$

lo que da:

$C_1=-(T_1-T_2)/L$ $\quad\quad$ $C_2=T_1$

Y por tanto:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{x}{L} \quad (2.1)$$

Ahora se puede utilizar la ley de Fourier para determinar la potencia calorífica:

$$q = -kA\frac{dT}{dx} = \frac{k\,A}{L}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}} \quad (2.2)$$

donde *A*=*H*·*b* y siendo $\frac{L}{kA}$ la resistencia de una pared plana. Expresando la ecuación (2) en forma gráfica:

$$R = \frac{L}{kA}$$

T_1 O→—/\/\/\——O T_2

q

De las expresiones de T(x) y q (ecuaciones 1 y 2), se deduce lo siguiente:

- La temperatura varía linealmente en la pared.
- La potencia calorífica es constante a través de la pared, esto es, no depende de x.
- El flujo de calor $\left[q'' = \frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{L/k}\right]$ es también constante a través de la pared.
- La resistencia térmica vale L/kA.
- Para una potencia q y un área A dados, el valor absoluto del gradiente de temperatura varía inversamente con la conductividad $\left|\frac{dT}{dx}\right| = \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{q}{k\,A}$. Es decir, cuanto menor sea la conductividad térmica tanto mayor será la pendiente de la ley de temperatura.

Otra forma de resolver la pared plana simple parte del hecho que q es constante, lo cual se podría haber deducido de la física del problema. Partiendo de la ley de Fourier:

$$q = -kA\frac{dT}{dx}$$

Separando variables e integrando entre la caras extremas de la pared:

$$\int_0^L q\,dx = -k\,A\int_{T_1}^{T_2} dT$$

Resolviendo y ordenando:

$$q = \frac{k\,A}{L}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}}$$

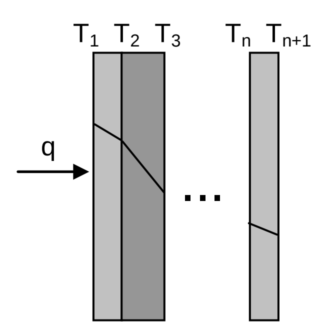
Para obtener la ley de temperatura, se puede integrar la ley de Fourier dejando indefinido el límite superior:

$$\int_0^x q\,dx = -k\,A\int_{T_1}^{T(x)} dT \rightarrow \qquad T(x) = T_1 - \frac{q}{k\,A}x$$

Llevando la expresión de q a T(x) resulta:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{x}{L}$$

Pared plana compuesta o múltiple: es la constituida por la superposición de varias paredes planas simples de espesores L_i y conductividades k_i.



Teniendo en cuenta que todas las paredes son atravesadas por la misma potencia calorífica:

$$q = \frac{T_i - T_{i+1}}{\frac{L_i}{k_i A}}$$

Despejando las diferencias de temperatura y sumando:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 - T_2 = q\dfrac{L_1}{k_1 A} \\ T_i - T_{i+1} = q\dfrac{L_i}{k_i A} \\ \quad \ldots \\ T_n - T_{n+1} = q\dfrac{L_n}{k_n A} \end{array}\right\} \quad T_1 - T_{n+1} = \sum (T_i - T_{i+1}) = q\sum \frac{L_i}{k_i A} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum \frac{L_i}{k_i A}}$$

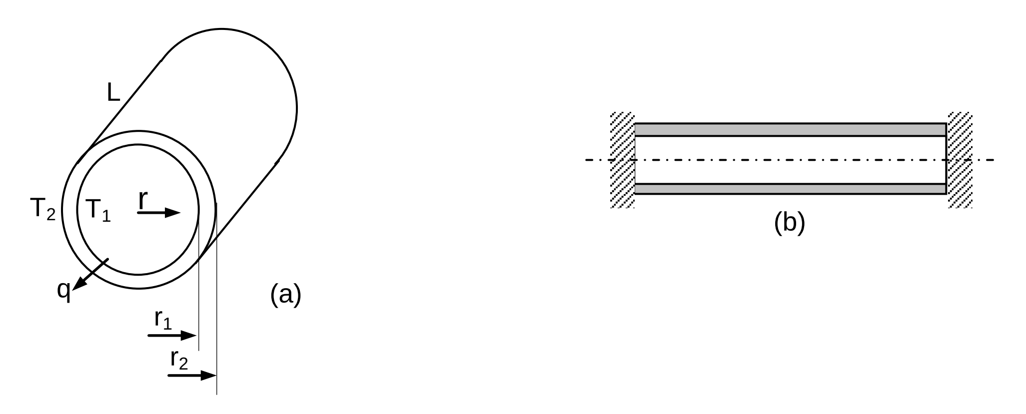
Y en términos de resistencias térmicas:

$$R_i = \frac{L_i}{k_i A} \qquad\qquad R_T = \sum \frac{L_i}{k_i A}$$

T_1 — q — T_2 — T_3 ... T_n — T_{n+1} $\qquad$ T_1 — q — T_{n+1}

Son aplicables las observaciones hechas para la pared simple, pudiéndose comprobar cómo la pendiente de la distribución de temperatura en cada pared está en relación inversa al producto k·A.

Pared cilíndrica simple: es la constituida por un tubo de longitud L cuyas caras interior (radio r_1) y exterior (radio r_2) están a temperaturas T_1 y T_2, respectivamente. Para que la conducción a través de la pared sea estrictamente unidimensional (en la dirección del radio) es preciso que los extremos del conducto estén aislados térmicamente. Si no dispone de tal aislamiento sólo se podrá asegurar la conducción unidimensional en puntos no próximos a los extremos.



Aplicando la ecuación de difusión del calor en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r\, r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k_\phi\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q^{'''}=\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Según lo establecido, se simplifica a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k\, r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

y dado que sólo queda una variable independiente:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(k\, r\frac{dT}{dr}\right)=0$$

Si la conductividad es constante, tal como se ha establecido:

$$r\frac{dT}{dr}=C_1$$

Integrando:

$$T(r)=C_1\ln r+C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen de la aplicación de las condiciones de contorno:

$T(r=r_1)=T_1$ $\quad\quad$ $T(r=r_2)=T_2$

lo que da:

$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad C_2 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln r_1$$

Y por tanto:

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1} \quad (2.3)$$

Ahora se puede utilizar la ley de Fourier para determinar la potencia calorífica:

$$q = -kA\frac{dT}{dr} = \frac{2\pi kL}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}} \quad (2.4)$$

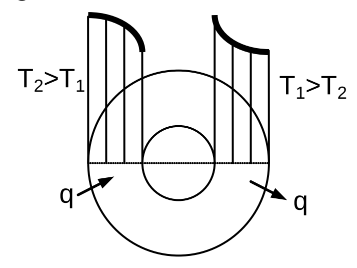
donde $A=2\pi rL$ y siendo $\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}$ la resistencia térmica de una pared tubular. Expresando la ecuación (4) en forma gráfica:

$$R = \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}$$

T_1 o→ q —/\/\/\— o T_2

De las expresiones de T(r) y q (ecuaciones 3 y 4), se deduce lo siguiente:

- La potencia calorífica es constante a través de la pared.
- El flujo de calor $\left[q'' = \frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1}\frac{k}{r}\right]$ disminuye para puntos tanto más hacia el exterior del tubo.
- La resistencia térmica vale $\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}$.
- La temperatura varía logarítmicamente con r:



Otra forma de resolver la pared cilíndrica parte del hecho que q es constante, lo cual se puede deducir de la percepción física del problema. Partiendo de la ley de Fourier:

$$q = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr} = cte$$

Separando variables e integrando entre la caras extrema de la pared:

$$\int_{r_1}^{r_2} q\frac{dr}{r} = -k2\pi L\int_{T_1}^{T_2} dT$$

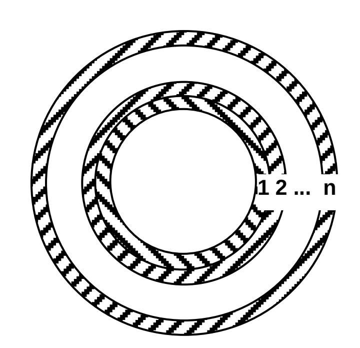
Resolviendo y ordenando:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}}$$

Para obtener la ley de temperatura, se puede integrar la ley de Fourier dejando indefinido el límite superior:

$$\int_{r_1}^{r} q\frac{dr}{r} = -k2\pi L\int_{T_1}^{T} dT \qquad \rightarrow \qquad T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}$$

Pared cilíndrica compuesta o múltiple: es un tubo de varias capas, cada una caracterizada por su conductividad k_i y sus radios interior r_i y exterior r_{i+1}, de tal forma que el exterior de una capa coincide con el interior de la siguiente.



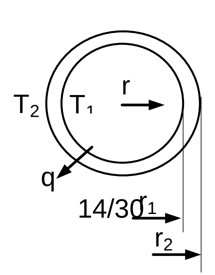
Operando análogamente a como se hizo con las paredes planas compuestas:

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum R_i} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum \dfrac{\ln r_{i+1}/r_i}{2\pi k_i L}}$$

$$R_i = \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{2\pi k_i L} \qquad\qquad R_T = \sum \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{2\pi k_i L}$$

T_1 T_2 T_3 ... T_n T_{n+1} q $\qquad$ T_1 T_{n+1} q

Pared esférica simple: es la constituida por una esfera hueca de radio interior r_1 y exterior r_2 y temperaturas T_1 y T_2, respectivamente.



Aplicando la ecuación de difusión del calor en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k_\phi \frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k_\theta \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Que según lo establecido, se simplifica a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

y dado que sólo queda una variable independiente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(k\, r^2 \frac{dT}{dr}\right)=0$$

Y como la conductividad se ha establecido constante:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1$$

Integrando:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen de la aplicación de las condiciones de contorno:

$T(r=r_1)=T_1$ $T(r=r_2)=T_2$

lo que da:

$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \qquad C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1 - r_1/r_2}$$

Y por tanto:

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2} \quad (2.5)$$

Ahora se puede utilizar la ley de Fourier para determinar la potencia calorífica:

$$q = -kA\frac{dT}{dr} = \frac{4\pi k}{1/r_1 - 1/r_2}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}} \quad (2.6)$$

donde $A=4\pi r^2$ y siendo $\frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}$ la resistencia de una pared esférica. Expresando la ecvuación (6) en forma gráfica:

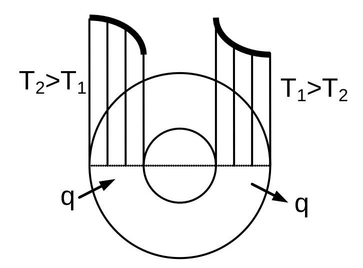
$$R = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}$$

T_1 T_2

q

De las expresiones de T(r) y q (ecuaciones 5 y 6), se deduce lo siguiente:

- La potencia calorífica es constante a través de la pared.
- El flujo de calor $\left[q'' = \frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \frac{k}{r^2} \right]$ disminuye para puntos tanto más hacia el exterior.
- La resistencia térmica vale $\frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}$.
- La temperatura varía inversamente con r^2.



Otra forma de resolver la pared cilíndrica parte del hecho que q es constante, lo cual se puede deducir de la percepción física del problema. Partiendo de la ley de Fourier:

$$q = -kA\frac{dT}{dx} = -k\left(4\pi r^2\right)\frac{dT}{dr} = cte$$

Separando variables e integrando entre la caras extrema de la pared:

$$\int_{r_1}^{r_2} q\frac{dr}{r^2} = -k4\pi\int_{T_1}^{T_2} dT$$

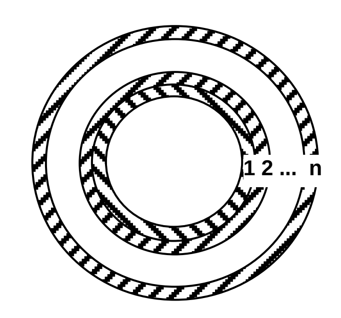
Resolviendo y ordenando:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}}$$

Para obtener la ley de temperatura, se puede integrar la ley de Fourier dejando indefinido el límite superior:

$$\int_{r_1}^{r} q\frac{dr}{r^2} = -k4\pi\int_{T_1}^{T} dT \quad \rightarrow \qquad T(r) = T_1 - \left(T_1 - T_2\right)\frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}$$

Pared esférica compuesta o múltiple: es la constituida por varias capas, cada una caracterizada por su conductividad k_i y sus radios interior r_i y exterior r_{i+1}, de tal forma que el exterior de una capa coincide con el interior de la siguiente. Operando análogamente al resto de paredes compuestas:



$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum R_i} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}}{4\pi\, k_i}}$$

$$R_i = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}}{4\pi\, k_i} \qquad R_T = \sum \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}}{4\pi\, k_i}$$

T_1 T_2 T_3 ... T_n T_{n+1} q

T_1 T_{n+1} q

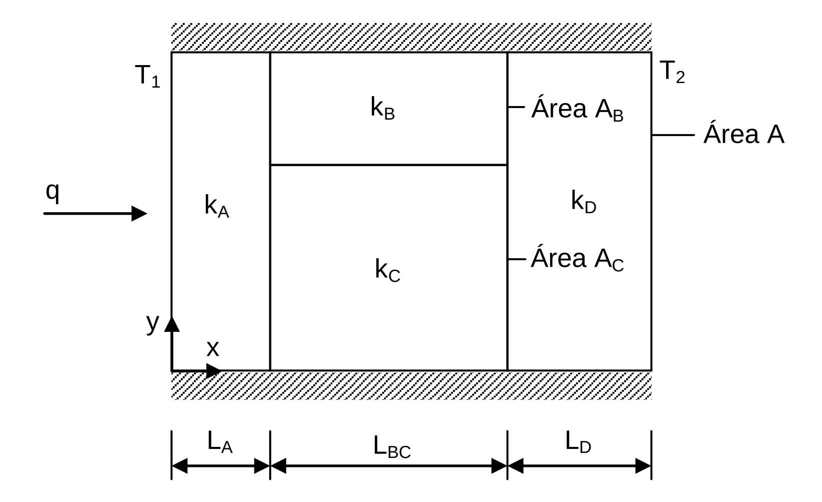
Existen una serie de geometrías en las que a pesar de no tener lugar conducción unidimensional (la ley de temperatura en su interior no se puede expresar en función de una sola coordenada), desde el punto de vista del cálculo de la potencia térmica que las atraviesa sí pueden tratarse como unidimensionales. Para ello es preciso que haya implicados sólo dos nodos térmicos (dos temperaturas límite diferentes) y exista resistencia térmica que caracterice la geometría. Es decir, que sea aplicable una expresión del tipo q=ΔT/R. Las configuraciones mostradas en la tabla siguiente, y en las condiciones expuestas, pueden tratarse como unidimensionales, presentándose sus resistencias térmicas.

Configuración	Resistencia térmica
Cilindros excéntricos	$R = \dfrac{coh^{-1}\left(\dfrac{r_2^2 + r_1^2 - e^2}{2 r_1 r_2}\right)}{2\pi kL}$ $L >> r_2$
Prismas cuadrados concéntricos	$R = \dfrac{0{,}93 \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) - 0{,}0502}{2\pi kL}$ $\dfrac{a}{b} > 1{,}4$ $R = \dfrac{0{,}785 \ln \dfrac{a}{b}}{2\pi kL}$ $\dfrac{a}{b} < 1{,}4$ $L >> a$
Cilindro circular y prisma cuadrado concéntricos	$R = \dfrac{\ln \dfrac{0{,}54\,a}{r}}{2\pi kL}$ $a > 2\,r$
Esfera enterrada La temperatura del medio en el infinito es T_2.	$R = \dfrac{1 - \dfrac{r_1}{2\,h}}{4\pi\, k\, r_1}$
Cilindro enterrado La temperatura del medio en el infinito es T_2.	$R = \dfrac{\cosh^{-1}\left(\dfrac{h}{r_1}\right)}{2\pi kL}$ $h < 3r_1$ $R = \dfrac{\ln\left(\dfrac{2h}{r_1}\right)}{2\pi kL}$ $h > 3r_1$ $L >> r_1$

Configuración	Resistencia térmica
Viga rectangular enterrada La temperatura del medio en el infinito es T_2.	$R = \dfrac{1}{2{,}756\,kL\left[\ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right)\right]^{-0{,}59}\left(\dfrac{h}{b}\right)^{-0{,}078}}$ $L >> h, a, b$
Arista con dos paredes adyacentes W es la arista interna del cubo	$R = \dfrac{1}{0{,}54\,k\,W} \qquad W > \dfrac{L}{5}$
Esquina de tres paredes adyacentes Disco sobre un sólido semi-infinito La temperatura del medio en el infinito es T_2	$R = \dfrac{1}{0{,}15\,k\,L} \qquad W > \dfrac{L}{5}$ $R = \dfrac{1}{4\,k\,r} \qquad W > \dfrac{L}{5}$

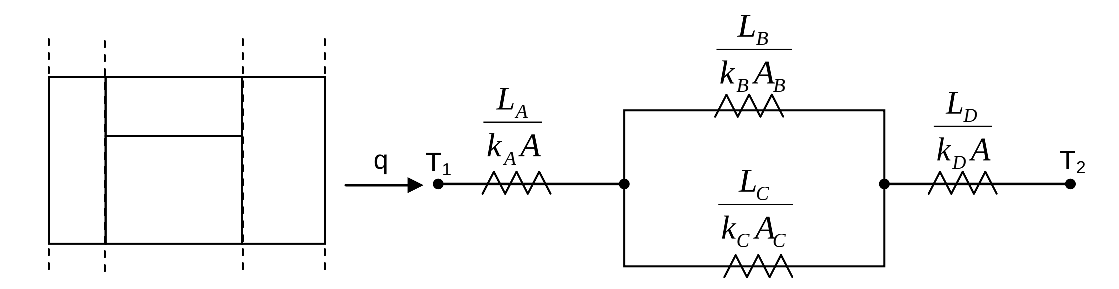
Tabla 1. Resistencia térmica de paredes complejas (k representa la conductividad del material).

Cálculo aproximado de paredes compuestas heterogéneas. Sea una pared plana compuesta heterogénea como la de la figura:

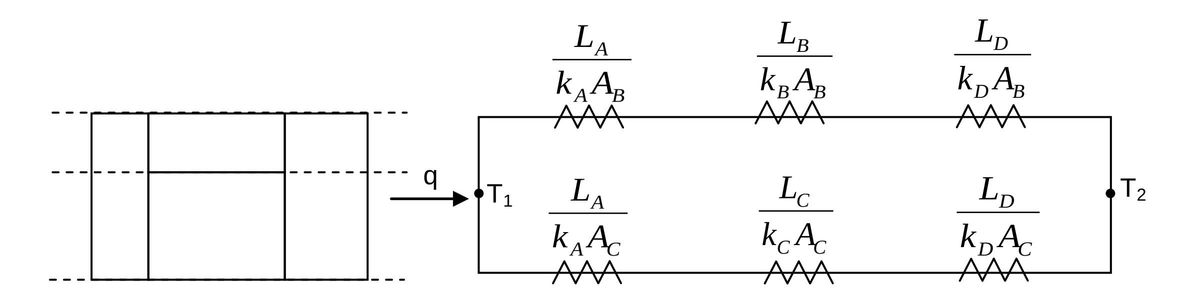


Aunque el flujo de calor en algunos puntos del interior de la pared sea bidimensional q''=f(x,y), se puede obtener un aproximación de la potencia térmica total que atraviesa la pared bajo la suposición de flujo unidimensional, q''=f(x). Para ello caben dos modelos:

- Las superficies perpendiculares a la dirección principal del flujo de calor se consideran isotermas, conocido también como el método de las rebanadas verticales.



- Las superficies paralelas a la dirección principal del flujo de calor se consideran adiabáticas, conocido como el método de las rebanadas horizontales.



Con ambos circuitos térmicos equivalentes de paredes compuestas se obtienen diferentes resultados de potencia calorífica a través de la pared que se acentúan, discrepancia que se incrementa en la medida que las conductividades de las paredes en paralelo son tanto más dispares. Los valores obtenidos pueden considerarse como los extremos de un intervalo dentro del cual se encuentra la verdadera potencia térmica que a traviesa la pared.

3. CONDUCCIÓN ESTACIONARIA CON GENERACIÓN INTERNA DE CALOR UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Se aborda en este capítulo el estudio de paredes con generación interna de calor q''' [W/m^3]. Tal es el caso cuando tiene lugar una reacción química exotérmica (desprendimiento de calor), una reacción nuclear, una corriente eléctrica o bien porque haya insertada una resistencia eléctrica uniformemente distribuida por el material. No hay que perder de vista que q''' también puede resultar negativo cuando, por ejemplo, hay una reacción química endotérmica (absorción de calor). Se considerará en este capítulo que la generación de calor es uniforme en el material, lo cual responde bien a las situaciones habituales, y que la conductividad del material no cambia con la temperatura.

Pared plana: considérese una pared plana de espesor L según la figura, cuyas temperaturas extremas T_1 y T_2 se suponen conocidas.

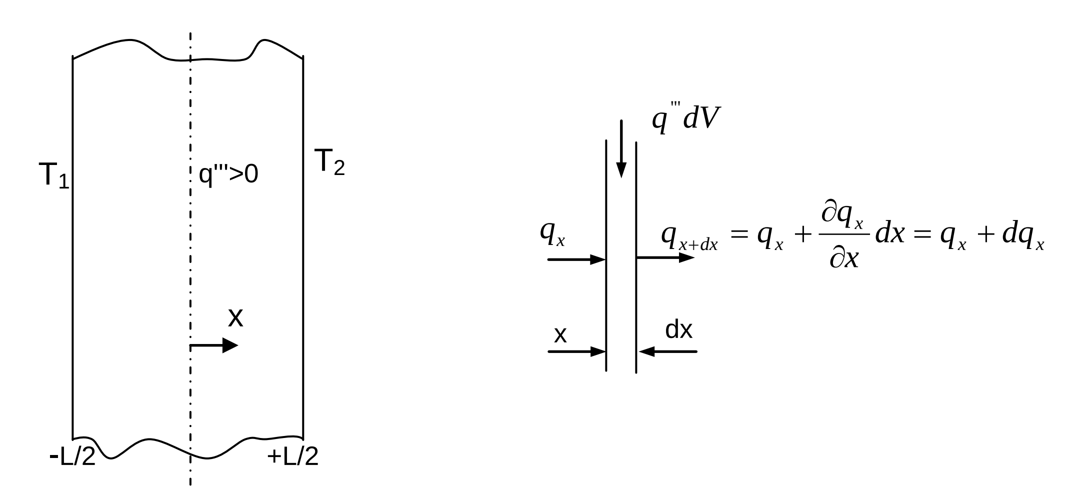


Figura 1.a. Pared plana Figura 1.b. Rebanada diferencial

Partiendo de la ecuación diferencial de difusión del calor:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q'''=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Según las premisas establecidas, y como T=T(x):

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+q'''=0 \quad \text{ó} \quad \boxed{k\frac{d^2T}{dx^2}+q'''=0}$$

Otra forma de obtener la ecuación diferencial hubiese sido considerar el equilibrio energético de una rebanada de espesor diferencial dx (figura 1.b):

$$q_{entra}+q_{genera}=q_{sale}$$

$$\cancel{q_x}+q'''A\,dx=\cancel{q_x}+dq_x$$

Aplicando la ley de Fourier:

$$dq_x = \frac{d}{dx}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)dx = -kA\frac{d^2T}{dx^2}dx$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$q^{'''}A\,dx = -kA\frac{d^2T}{dx^2}dx$$

De donde:

$$\boxed{k\frac{d^2T}{dx^2} + q^{'''} = 0}$$

Integrando dos veces resulta:

$$T(x) = -\frac{q^{'''}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

Aplicando las condiciones de contorno en los extremos de la pared.

$$T(x = -L/2) = T_1 \qquad\qquad T(x = L/2) = T_2$$

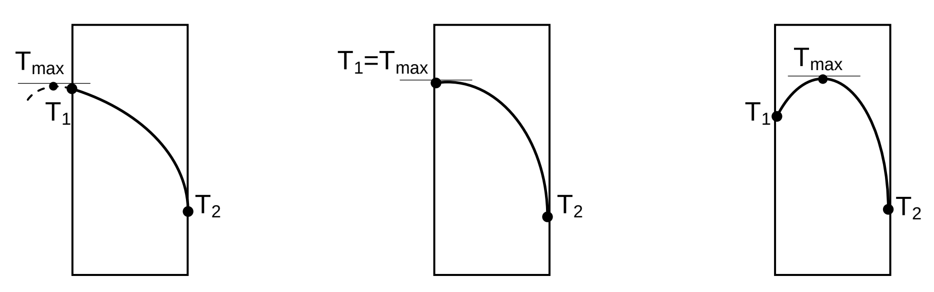
se obtienen las constantes de integración:

$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{L} \qquad\qquad C_2 = \frac{q^{'''}L^2}{8k} + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

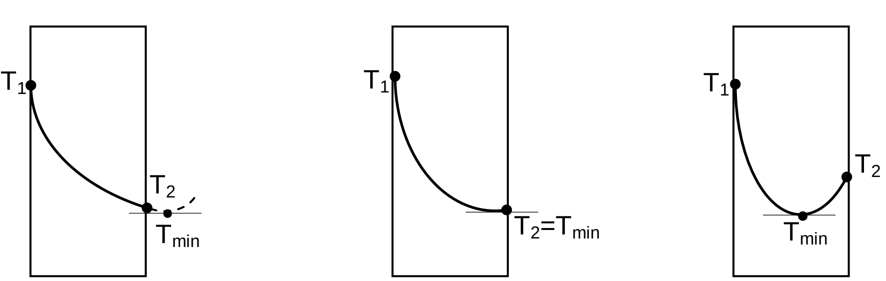
Y por tanto, la ley en la pared es:

$$\boxed{T(x) = \underbrace{\frac{q^{'''}L^2}{8k}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)}_{generación\ interna} \underbrace{-(T_1 - T_2)\frac{x}{L} + \frac{T_1 + T_2}{2}}_{pared\ plana\ sin\ q^{'''}}}$$

Que representa una parábola. Las diferentes situaciones que se pueden presentar son:



Ley de temperatura con generación positiva ($q^{'''}>0$).



Ley de temperatura con generación negativa ($q^{'''}<0$).

Y la potencia calorífica q en un plano genérico x:

$$q(x) = -k\,A\frac{dT}{dx} = \underbrace{q'''\,A\,x}_{generación\ interna} + \underbrace{\frac{\frac{T_1 - T_2}{L}}{kA}}_{pared\ plana\ \sin q'''}$$

Por tanto, las potencias caloríficas superficiales en las caras izquierda y derecha valdrán:

$$q_{-L/2} = -k\,A\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=-L/2} = -q'''\frac{L}{2}A + (T_1 - T_2)\frac{k\,A}{L}$$

$$q_{+L/2} = -k\,A\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=-L/2} = q'''\frac{L}{2}A + (T_1 - T_2)\frac{k\,A}{L}$$

Dado que la distribución de temperatura es parabólica, el punto de máxima/mínima temperatura estará ubicado donde $\frac{dT}{dx} = 0$, para el cual:

$$x\Big|_{\frac{dT}{dx}=0} = -\frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''}$$

De cuyo valor dependerá que el máximo/mínimo este ubicado dentro de la pared $\left|\frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''}\right| < \frac{L}{2}$ o fuera $\left|\frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''}\right| > \frac{L}{2}$. El que la segunda derivada $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{q'''}{k}$ sea negativa (q'''>0), (o positiva si q'''<0), da la confirmación de que en $x\Big|_{\frac{dT}{dx}=0}$ efectivamente hay un máximo (q'''>0) o un mínimo (q'''<0), de valor:

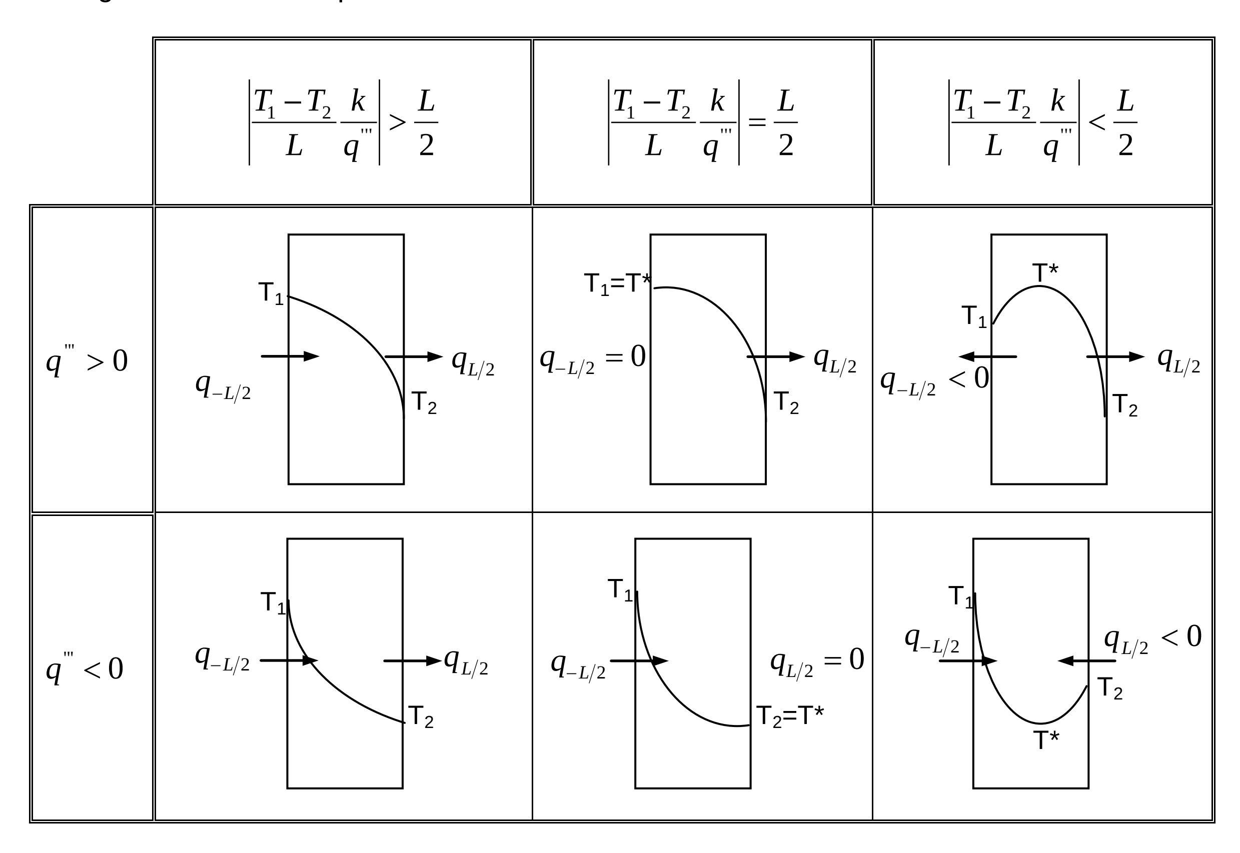
$$T^* = \frac{q'''L^2}{8k}\left[1 - \frac{4(T_1 - T_2)^2 k^2}{L^4 q'''^2}\right] + \frac{(T_1 - T_2)^2 k}{L^2 q'''} + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Cuando q'''>0, el flujo de calor a través de la cara fría (derecha en la figura 1.a) siempre tiene lugar hacia el exterior de la pared, mientras que en la cara caliente (izquierda figura 1.a) dicho flujo puede ser:

- Hacia el interior $-q'''\frac{L}{2} + (T_1 - T_2)\frac{k}{L} > 0$ $\left(ó \quad \frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''} > \frac{L}{2}\right)$, para el cual T^* estará localizado exteriormente a la pared.
- Hacia el exterior $-q'''\frac{L}{2} + (T_1 - T_2)\frac{k}{L} < 0$ $\left(ó \quad \frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''} < \frac{L}{2}\right)$, en cuyo caso T^* está dentro de la pared.
- Nulo $-q'''\frac{L}{2} + (T_1 - T_2)\frac{k}{L} = 0$ $\left(ó \quad \frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''} = \frac{L}{2}\right)$, estando situado T^* justo en la cara caliente.

Si q'''<0, el flujo de calor en la cara caliente siempre es hacia el interior de la pared, mientras que en la cara fría dicho flujo puede ser hacia el exterior, hacia el interior o incluso nulo, dependiendo también de la situación de T^*, es decir, del valor del término $\frac{T_1 - T_2}{L}\frac{k}{q'''}$ frente a L/2.

Como se ha podido comprobar, la localización de T^* está ligada al sentido del flujo de calor en la pared caliente (q'''>0), o en la pared fría (q'''<0). En la tabla siguiente se recogen las diferentes posibilidades comentadas:



Si las temperaturas de ambas caras coinciden (T_1=T_2=T_s), las ecuaciones se simplifican notablemente:

$$T(x) = \frac{q''' L^2}{8k}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) + T_s$$

$$q(x) = q'''\, A\, x$$

$$T_{max} = T_s + \frac{q''' L^2}{8k} \qquad q''' > 0$$

$$T_{min} = T_s + \frac{q''' L^2}{8k} \qquad q''' < 0$$

En tal caso la distribución de temperatura es simétrica respecto al plano x=0 y, por tanto, la temperatura máxima/mínima está justo en el centro de la pared. Teniendo en cuenta las expresiones de T_{max}/T_{min}, T(x) se puede expresar:

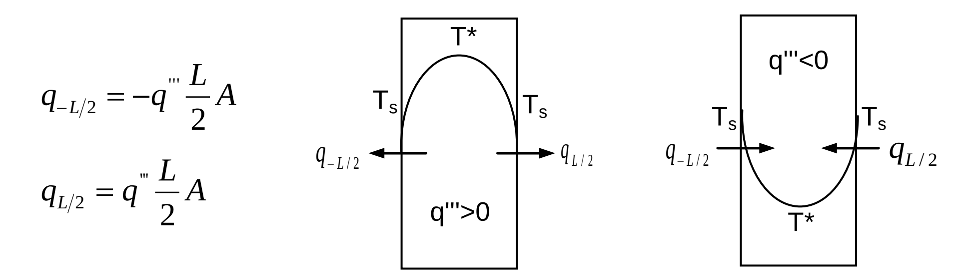
$$T(x) = T_{max} - \frac{q'''}{2k}x^2 \qquad q''' > 0$$

$$T(x)=T_{\min}-\frac{q'''}{2k}x^2 \qquad q'''<0$$

Y las potencias caloríficas superficiales serán en ambas caras hacia el exterior ($q'''>0$), o hacia en interior ($q'''<0$):

$$q_{-L/2}=-q'''\frac{L}{2}A$$

$$q_{L/2}=q'''\frac{L}{2}A$$



Bajo estas circunstancias ($T_1=T_2=T_s$) es posible expresar la relación entre las temperaturas en el centro T(x=0) y la superficial T_s con q mediante un modelo de resistencia térmicas. Particularizando q(x) en L/2:

$$q_{L/2}=q'''A\frac{L}{2} \qquad \rightarrow \qquad q'''=\frac{2q_{L/2}}{AL}$$

Y sustituyendo en las leyes de temperatura T_{max} y T_{min}:

$$T_{\max}=T_s+\frac{q'''L^2}{8k}=T_s+\frac{q_{L/2}L}{4kA} \qquad q'''>0$$

$$T_{\min}=T_s+\frac{q'''L^2}{8k}=T_s-\frac{|q_{L/2}|L}{4kA} \qquad q'''<0$$

Y reordenando:

q'''>0: $$q_{L/2}=\frac{T_{\max}-T_s}{\frac{L}{4kA}}$$

$R=\frac{L}{4kA}$, T_{max} o—→—/\/\/\—o T_s, $q_{L/2}$

q'''<0: $$|q_{L/2}|=\frac{T_s-T_{\min}}{\frac{L}{4kA}}$$

$R=\frac{L}{4kA}$, T_s o—→—/\/\/\—o T_{min}, $|q_{L/2}|$

Es decir, cuando $T_1=T_2=T_s$ es posible sustituir la mitad de la pared plana con generación interna por otra equivalente sin generación y cuya resistencia térmica es $\frac{L}{4kA}$, siendo L el espesor de la pared completa y no de la mitad.

Barra cilíndrica maciza

Sea una barra cilíndrica maciza de radio R con generación interna uniforme q''' y temperatura superficial T_s.

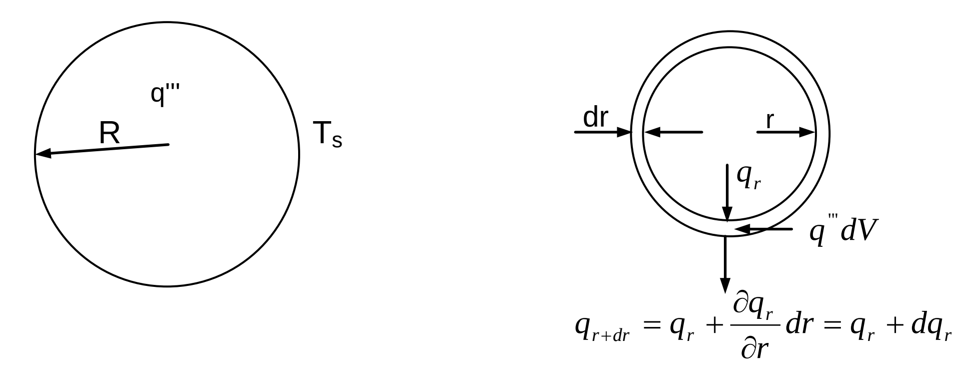


Figura 2.a. Barra cilíndrica Figura 2.b. Rebanada diferencial

Partiendo de la ecuación diferencial de difusión del calor en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r\, r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k_\phi \frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)+q'''=\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Según las premisas establecidas, y como T=T(r):

$$k\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+q'''=0 \qquad \text{ó} \qquad \boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{q'''}{k}=0}$$

Otra forma de obtener la ecuación diferencial hubiese sido considerar el equilibrio energético de una rebanada de espesor diferencial dr (figura 2.b):

$$q_{entra}+q_{genera}=q_{sale}$$

$$\cancel{q_r}+q'''\,2\pi rL dr=\cancel{q_r}+dq_r \qquad (3.1)$$

Aplicando la ley de Fourier:

$$dq_r=\frac{d}{dr}\left(-k2\pi rL\frac{dT}{dr}\right)dr=-2\pi kL\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr \qquad (3.2)$$

Llevando (2) a (1):

$$q'''\,2\pi rL\, dr=-2\pi kL\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr$$

Simplificando y ordenando:

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{q'''}{k}=0}$$

En cualquier caso, integrando dos veces:

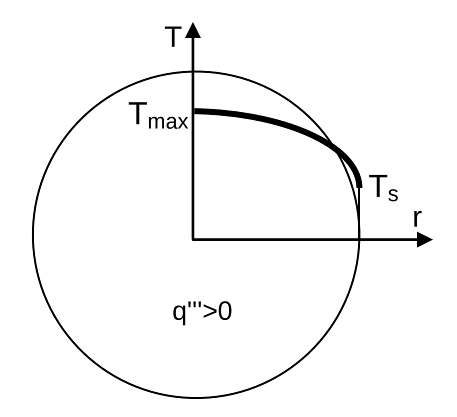
$$T(r) = -\frac{q'''}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

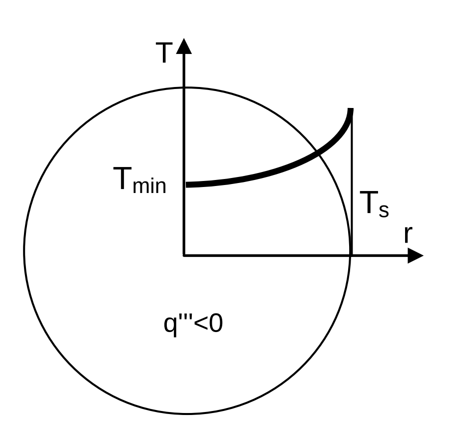
Aplicando las condiciones de contorno: $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$ (por simetría) y $T(r = R) = T_s$,

se obtienen las constantes de integración $c_1 = 0$ y $c_2 = T_s + \frac{q'''}{4k} R^2$. La distribución de temperatura queda finalmente como:

$$\boxed{T(r) = T_s + \frac{q'''}{4k}\left(R^2 - r^2\right)}$$

Que constituye una parábola. Gráficamente:





Y la potencia calorífica en un radio genérico:

$$\boxed{q(r) = -kA\frac{dT}{dr} = \pi L q''' r^2}$$

Que particularizada para el radio exterior de la barra:

$$\boxed{q(R) = q''' \pi R^2 L}$$

La temperatura máxima (q'''>0) o mínima (q'''<0) estará localizada necesariamente en el centro de la barra:

$$T_{\max} = T_s + \frac{q'''}{4k} R^2 \qquad q''' > 0$$

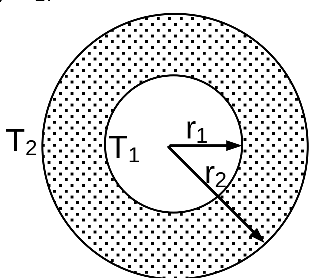
$$T_{\min} = T_s + \frac{q'''}{4k} R^2 \qquad q''' < 0$$

En la barra cilíndrica también es posible utilizar modelos de resistencias térmicas para representar la relación de la potencia calorífica q(R) que atraviesa la superficie de la barra con las temperaturas superficial T_s y en el centro (T_{max} o T_{min}). Combinando las ecuaciones:

q'''>0: $q(R)=\dfrac{T_{\max}-T_s}{\dfrac{1}{4\pi kL}}$ $\quad$ T_{max} o→—$R=\dfrac{1}{4\pi kL}$—o T_s, $q(R)$

q'''<0: $|q(R)|=\dfrac{T_{\min}-T_s}{\dfrac{1}{4\pi kL}}$ $\quad$ T_s o→—$R=\dfrac{1}{4\pi kL}$—o T_{min}, $|q(R)|$

Las ecuaciones de la barra cilíndrica maciza podrían haberse obtenido como un caso particular de otro más general constituido por una barra cilíndrica hueca de radios r_1 y r_2 y temperaturas superficiales T_1 y T_2, como se muestra en la figura:



Al aplicar las condiciones de contorno:

$$T(r=r_1)=T_1$$

$$T(r=r_2)=T_2$$

a la ley general de temperatura:

$$T(r)=-\frac{q'''}{4k}r^2+c_1\ln r+c_2$$

resultan las constantes de integración c_1 y c_2:

$$c_1=\frac{\dfrac{q'''}{4k}\left(r_2^2-r_1^2\right)-\left(T_1-T_2\right)}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

$$c_2=T_1+\frac{q'''}{4k}r_1^2-\frac{\dfrac{q'''}{4k}\left(r_2^2-r_1^2\right)-\left(T_1-T_2\right)}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\ln r_1$$

La ley de temperatura queda:

$$T(r)=T_1-\left(T_1-T_2\right)\frac{\ln\left(r/r_1\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}+\frac{q'''}{4k}\left[\left(r_2^2-r_1^2\right)\frac{\ln\left(r/r_1\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}-\left(r^2-r_1^2\right)\right]$$

Por aplicación de la ley de Fourier, la potencia calorífica será:

$$q(r) = -kA\frac{dT}{dr} = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} - \pi Lq^{'''}\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln(r_2/r_1)} - r^2\right]$$

que particularizada para r_1 y r_2:

$$q(r_1) = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} - \pi Lq^{'''}r_1^2\left[\frac{(r_2/r_1)^2 - 1}{2\ln(r_2/r_1)} - 1\right]$$

$$q(r_2) = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} + \pi Lq^{'''}r_2^2\left[1 - \frac{1 - (r_1/r_2)^2}{2\ln(r_2/r_1)}\right]$$

Haciendo la diferencia entre las potencias caloríficas superficiales de la caras interna y externa:

$$q(r_2) - q(r_1) = \pi Lq^{'''}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

que, evidentemente, corresponde con la potencia generada internamente en la pared, dada por el producto de la generación interna $q^{'''}$ por el volumen de la misma $\pi L\left(r_2^2 - r_1^2\right)$.

Es posible establecer a priori el sentido de las potencias caloríficas en las caras interior y exterior del tubo por simple comparación de la situación del punto de pendiente nula en la distribución de temperatura (punto de máxima temperatura si $q^{'''}>0$ o de mínima temperatura si $q^{'''}<0$) con los radios r_1 y r_2. Haciendo nula la derivada de la temperatura:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q^{'''}}{2k}r^* + c_1\frac{1}{r^*} = 0$$

resulta:

$$r^* = r\Big|_{\frac{dT}{dr}=0} = \sqrt{\frac{2kc_1}{q^{'''}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) - \frac{2k}{q^{'''}}(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)}}$$

siendo r* el radio donde dicha derivada es nula. La casuística que se presenta en este caso coincide con la que tiene lugar en una pared plana con generación interna. Es decir:

- Con $q^{'''}>0$ la potencia calorífica sale por la cara más fría, mientras que en la cara más caliente la potencia térmica puede ir hacia dentro de la pared, hacia fuera o ser nula.

- Con $q^{'''}<0$ la potencia calorífica entra por la cara más caliente, mientras que en la cara más fría la potencia térmica puede ir hacia dentro de la pared, hacia fuera o ser nula.

Bibliografía

Incropera, Frank P.; DeWitt, David P. *Fundamentos de Transferencia de Calor.* Ed. Pearson.

Kreith, Frank; Bohn, Mark S. *Principios de Transferencia de Calor*. Thomsom Learning.

Nellis, Gregory; Klein, Sanford. *Heat Transfer*. Cambridge University Press.

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

